

Aufgabe 1.

a) *Reguläre Grammatik*

$$G = (\{U, V, W, S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \{$$

$$U ::= bU|b$$

$$V ::= bV|aU|a$$

$$W ::= bW|aV$$

$$S ::= bS|aW$$

$$\}$$

b) *Kontextfreie Grammatik*

$$G = (\{U, S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \{$$

$$U ::= ab|ba|UU$$

$$S ::= [U]a[U]a[U]a[U]$$

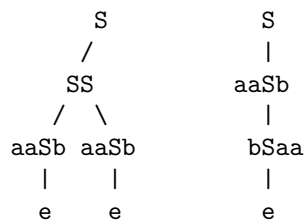
$$\}$$

Aufgabe 2.

a) Die Sprache $L(G)$ kann Wörter ableiten, die aus den Buchstaben a und b bestehen, wobei die Anzahl der a's immer doppelt so groß ist wie die Anzahl der b's. Außerdem ist die Anzahl unmittelbarer Wiederholungen von a's immer geradzahlig, wogegen b auch in ungeradzahligem Wiederholungen gereiht sein kann.

b) *Ableitungsbäume für aabaab*

Hinweis: ϵ soll das leere Wort ϵ darstellen.



Aufgabe 3.

Zu zeigen: $X = Y$

$$W = V \cup \sum$$

$$X = W^* V W^*$$

$$Y = W^* \setminus \sum^*$$

$$V \cap \sum = \emptyset$$

Bemerkung: $(\epsilon \in \sum^*) \Rightarrow (\epsilon \notin Y)$

Mengengleichheit wird im Allgemeinen durch das Nachweisen der antisymmetrischen Teilmengenrelation von X und Y bewiesen.

Für ein Alphabeth A gelten folgende Regeln:

- (1) Ein Wort $\omega \in A^*$ ist ein geordnetes Tupel von $n \geq 0$ Buchstaben aus A .

- (2) Die Kombination eines Wortes $\omega_1 \in A^*$ mit einem Element $a \in A$ zu $\omega_1 a = \omega_2$ (oder $a\omega_1 = \omega_2$) ist auch wieder ein Wort von A^* .
- (3) Die Kombination zweier Wörter $\omega_1, \omega_2 \in A^*$ zu einem neuen Wort $\omega_1\omega_2 = \omega_3$ ist auch wieder ein Wort von A^* .

Teilschritt 1: Zeige, dass $X \subseteq Y$:

Für alle $\omega_1, \omega_2 \in W^*$ und $v \in V$ gilt: $\omega_1 v \omega_2 \in X$

Da $\omega_1 \in W^*$ und $v \in (V \cup \Sigma = W)$ gilt gemäß Regel 2: $(\omega_1 v = \omega_3) \in W^*$

Da $\omega_2 \in W^*$ gilt desweiteren gemäß Regel 3: $(\omega_3 \omega_2 = \omega) \in W^*$

Da $v \notin \Sigma$ ist $(\omega_1 v = \omega_3) \notin \Sigma^*$ und somit auch $(\omega_3 \omega_2 = \omega) \notin \Sigma^*$

Also ist $(\omega_1 v \omega_2 = \omega_4) \in W^* \setminus \Sigma^*$ und es gilt: $X \subseteq Y$

Teilschritt 2: Zeige, dass $X \supseteq Y$:

Für alle $\omega \in Y$ gilt: $\omega \in W^*$ und $\omega \notin \Sigma^*$

Da ω nicht in Σ^* liegt, muss es mindestens einen Buchstaben enthalten, der nicht Element von Σ ist. Da $W = V \cup \Sigma$ muss dieser Buchstabe Element von V sein. Das bedeutet:

$\forall \omega \in Y \exists v \in V, v \in \omega$ (Für alle ω aus Y existiert ein v aus V , welches in ω enthalten ist.)

Somit ist das Kriterium $\omega \notin \Sigma^*$ erfüllt und die restlichen Buchstaben können aus ganz W sein (das bedeutet, die restlichen Teilwörter sind Element von W^*).

Da $v \in V$ und $\omega_1 \in W^*$ gilt gemäß Regel 2 und eben genannter Bedingungen: $(v\omega_1 = \omega_2) \in Y$

Da $\omega_2 \in Y$ und $\omega_3 \in W^*$ gilt gemäß Regel 3: $(\omega_3 \omega_2 = \omega) \in Y$

Wir sehen: $\omega = \omega_3 \omega_2 = \omega_3 v \omega_1 \in (W^* V W^* = X)$, und somit gilt: $Y \subseteq X$

Da $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ ist bewiesen: $X = Y$

q.e.d

Aufgabe 4.

- a) Typ 2 (Die Grammatik ist *nicht* Typ 3, da die Ableitungsregel $S \rightarrow SS$ kein Terminalsymbol enthält).
- b) $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$
 $P = \{$

$S ::= ab[S]$

$S ::= ba[S]$

$S ::= aa[S]$

$S ::= bb[S]$

$\}$